上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程论文

COURSE PAPER

论文题目：李代数表示论初步探究

学生姓名：万俊成

学生学号：516021910620

课程名称：群与代数表示论

指导教师：司梅

学院 (系)：电子信息与电气工程学院

第一章　基本知识

1.1　李代数

我探究的是复数域 $\mathbb{C}$ 上有限维李代数的结构和表示论。本次的研究内容大多数参考了《李代数》（万哲先著）。此外，我也尽量和我们的课本《群与代数表示引论》（冯克勤著）关联。

李代数　首先需要了解复数域 $\mathbb{C}$ 上有限维李代数的定义。假设 $\mathbf{g}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间，并且 $\mathbf{g}$ 作为环，其元素之间满足某个乘法运算 $[\cdot,\cdot]$，即对于 $\mathbf{g}$ 中任意两元素 X，Y，$[X,Y]\in\mathbf{g}$。同时，该乘法运算 $[\cdot,\cdot]$ 满足三个条件：

1. 关于第一个变量的线性性：$\forall X_1,X_2,Y\in\mathbf{g}$，$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$，$[\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y]=\lambda_1[X_1,Y]+\lambda_2[X_2,Y]$。
2. 反对称性：$\forall X,Y\in\mathbf{g}$，$[X,Y]=-[Y,X]$。
3. Jacobi 恒等式：$\forall X,Y,Z\in\mathbf{g}$，$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$。

由于李代数作为环不满足结合律，为非结合环。所以它和课本第三章 1.1.1 的定义是不同的。对于 Jacobi 恒等式这个的条件，上网了解到是为了李代数能确定李群的局域性质。由乘法运算的第二个条件得到李代数具有性质：

4. $\forall X\in\mathbf{g}$，$[X,X]=0$。

矩阵李代数　设 $GL(n,\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上所有 $n\times n$ 矩阵的集合，其对于矩阵加法和数乘组成 $\mathbb{C}$ 上的一个 n^2 维线性空间。定义乘法 $[\cdot,\cdot]$ 为：$\forall X,Y\in GL(n,\mathbb{C})$，$[X,Y]=XY-YX$。那么，$GL(n,\mathbb{C})$ 组成一个李代数。

单李代数　如果李代数 $\mathbf{g}$ 除了自身和 $\{0\}$ 这两个理想外，不再有其它的理想，那么称 $\mathbf{g}$ 是单李代数。易知，一维李代数是单李代数，维数大于 1 的交换李代数非单李代数。

1.2　其他定义

内导子　设 $\mathbf{g}$ 由 r 个李代数组成，设 $A\in\mathbf{g}$，定义内导子 $\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}A\in GL(r,\mathbb{C})$：

$$\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}A(X)=[A,X],\quad X\in\mathbf{g}$$

那么，$\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}A$ 不仅仅是 $\mathbf{g}$ 上的线性变换，而且满足条件：

$$\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}A([X,Y])=[\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}A(X),Y]+[X,\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}(Y)]$$

容易证明，从 $\mathbf{g}$ 中元素到内导子的映射：

$$A \longrightarrow \mathrm{ad}_{\mathbf{g}} A$$

是一个同态映射。

Cartan 内积 定义 $\mathbf{g}$ 上的内积 $(\cdot,\cdot)$ 如下所示：

$$(X, Y) = tr(\mathrm{ad}_{\mathbf{g}} X \mathrm{ad}_{\mathbf{g}} Y)$$

容易证明，内积 $(\cdot,\cdot)$ 是一个对称双线性函数。研究者也称其为 Killing 型。

1.3 Cartan 子代数

设 $\mathbf{g}$ 是李代数，$\mathbf{h}$ 为它的某个幂零子代数。所有的线性变换 $\mathrm{ad}_{\mathbf{g}} H (H \in \mathbf{h})$ 组成一个 $\mathbf{g}$ 上的幂零子代数，记为 $\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}$。

根据已有的定理，李代数 $\mathbf{g}$ 有直和分解：

$$\mathbf{g} = \sum_{\phi \in \Delta} \mathbf{g}^{\phi}_{\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}}$$

其中 Δ 是 $\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}$ 的权的集合，定义为：

$$\Delta = \{\phi \in \mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}\text{上的取复数值的函数} : Hv = \phi(H)v, \ \forall H \in \mathbf{h}\}$$

而 $\mathbf{g}^{\phi}_{\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}}$ 称为权 ϕ 的权子空间，定义为：

$$\mathbf{g}^{\phi}_{\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}} = \{v \in \mathbf{g} : \exists n \in \mathbb{N}^{+}, s.t. \ (H - \phi(H)I)^n v = 0, \ \forall H \in \mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}\}$$

注意到，这里的这个权子空间很类似于高等代数中学的广义特征向量子空间，而且具有一些和广义特征向量子空间相同的性质。比如 $n = \dim \mathbf{g}^{\phi}_{\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}}$ 即有 $(H - \phi(H)I)^n v = 0$。

当满足下面的条件：

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}^{0}_{\mathrm{ad}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}}$$

我们称 $\mathbf{h}$ 为 $\mathbf{g}$ 的一个 Cartan 子代数。

1.4 李代数的表示

设 $\mathbf{g}$ 是某个李代数，V 是复数域上的有限维线性空间，从 $\mathbf{g}$ 映入 $GL(V)$ 的一个同态 $\rho : X \to \rho(X)$ 称为李代数 $\mathbf{g}$ 的线性表示。两个李代数表示 ρ_1, ρ_2 称为等价，当且仅当存在可逆映射 P，满足 $\forall X \in \mathbf{g}, P\rho_1(X) = \rho_2(X)P$。同样类似本课程的内容，也有李代数表示的和：

$$\rho(X)(v_1 + v_2) = \rho_1(X)v_1 + \rho_2(X)v_2$$

Kronecker 积：

$$\rho(X)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(X)v_2$$

另外，还有星表示或逆步表示：

$$(v, \rho^*(X)(v^*)) = -(\rho(X)v, v^*),\ v \in V, v^* \in V^*$$

第二章 典型李代数

这里大概介绍四种典型李代数，分别为 A_n, B_n, C_n, D_n。它们均为矩阵李代数的子代数，同时也是单李代数，

2.1 A_n

矩阵李代数 $GL(n+1,\mathbb{C})$ 中所有迹为 0 的矩阵组成一个子代数，记为 A_n，则有 $\dim A_n = n^2+2n$。此外，A_n 本身为 $GL(n+1,\mathbb{C})$ 的理想，因为，$\forall X \in GL(n+1,\mathbb{C})$, $\forall Y \in A_n$ $tr([X,Y]) = tr(XY-YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0$，从而 $[X,Y] \in A_n$。$GL(n+1,\mathbb{C})$ 中所有迹为 0 的对角矩阵组成 A_n 的一个 n 维交换子代数 H_n。具体的，设对角矩阵

$$H_{\lambda_1,\cdots,\lambda_m} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n+1} \end{bmatrix}, \quad s.t. \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$$

这样所有的 $H_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}}$ 即为该 n 维交换子代数 H_n。

以 E_{ik} 表示 i 行 k 列位置上的元素为 1，而其余位置的元素为 0 的矩阵，再令：

$$H_{\lambda_i-\lambda_k} = E_{ii} - E_{kk}, \quad (i \neq k)$$
$$E_{\lambda_i-\lambda_k} = E_{ik}, \quad (i \neq k)$$

那么，我们有：

$$A_n = \mathrm{span}(H_n \cup \{E_{\lambda_i-\lambda_k} : i \neq k, i, k = 1, 2, \cdots, n+1\})$$

其中下标集合 $\{\lambda_i - \lambda_k : i \neq k, i, k = 1, 2, \cdots, n+1\}$ 中的每个元素称为 A_n 的根，如果 $n \geq 2$，固定一个根，则 A_n 的任意一个根都可以从该固定根和其他根逐次添加得到。A_n 的结构公式如下（这不难由矩阵李代数的乘法运算定义 $[X,Y] = XY - YX$ 得到）：

$$[X_1, X_2] = 0, \quad 对任意的 X_1, X_2 \in H_n$$
$$[H_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}}, E_\alpha] = \alpha E_\alpha, \quad 对任一根 \alpha$$
$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad 对任一根 \alpha$$
$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0, & 若 \alpha+\beta 不是根 \\ \pm E_{\alpha+\beta}, & 若 \alpha+\beta 是根 \end{cases}$$

2.2 B_n、C_n 和 D_n

设 M 是 $n \times n$ 矩阵，适合条件：

$$XM + MX' = 0 \tag{2–1}$$

的所有 $n \times n$ 复系数矩阵 X 组成一个线性李代数，记为 $GL(n, M, \mathbb{C})$。如果 X, Y 为该李代数 $GL(n, M, \mathbb{C})$ 中元素，那么有 $XM + MX' = 0$ 和 $YM + MY' = 0$，从而有：

$$\begin{aligned}
[X,Y]M + M[X,Y]' &= (XY - YX)M + M(XY - YX)' \\
&= XYM - YXM + MY'X' - MX'Y' \\
&= -XMY' + YMX' - YMX' + XMY' \\
&= 0
\end{aligned}$$

当 M_1 合同于 M_2 时，设 $M_1 = TM_2T'$，那么有：

$$\begin{aligned}
XM_1 + M_1X' &= XTM_2T' + TM_2T'X' \\
&= T(T^{-1}XT)M_2T' + TM_2(T^{-1}XT)'T' \\
&= T[(T^{-1}XT)M_2 + M_2(T^{-1}XT)']T'
\end{aligned}$$

从而 $GL(n, M_1, \mathbb{C})$ 和 $GL(n, M_2, \mathbb{C})$ 同构。

下面讨论 M 为可逆对称矩阵、可逆反对称矩阵两种情况。

当 M 为可逆对称矩阵时，M 或者合同于：

$$\begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad 当n = 2k为偶数$$

或者合同于：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad 当n = 2k + 1为奇数$$

记 $n = 2k+1$ 是奇数时 $GL(n, M, \mathbb{C}) = B_k$，而 $n = 2k$ 是偶数时 $GL(n, M, \mathbb{C}) = D_k$。其中，$B_k, D_k$ 均为 $GL(n, M, \mathbb{C})$ 的子代数。

当 M 为可逆反对称矩阵时，n 只能为偶数，设 $n = 2k$，那么任一可逆反对称矩阵合同于：

$$\begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{bmatrix}$$

相应的代数称为辛代数，记为 C_k。

首先，令矩阵 S 为：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix}$$

将 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵 X 作和 S 同样的分块：

$$X = \begin{bmatrix} a & u & v \\ w & A_{11} & A_{12} \\ z & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

带入条件：

$$XS + SX' = 0$$

可以得到下面的约束：

$$a = 0,\ w = -v',\ z = -u',\ A_{11} = -A'_{22},\ A_{12} = -A'_{12},\ A_{21} = -A'_{21}$$

从而有 B_n 的一般表达式：

$$\begin{bmatrix} 0 & u & v \\ -v' & A_{11} & A_{12} \\ -u' & A_{21} & -A'_{11} \end{bmatrix},\quad A'_{12} = -A_{12},\ A'_{21} = -A_{21}$$

可以看出 B_n 的维数 $\dim B_n = 2n^2 + n$。

和 A_n 一样，我们想探讨 B_n 的结构。我们仍然先从 B_n 的交换子代数 H_n 入手，设 $H_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} = \mathrm{diag}(0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, -\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_n)$。所有的 $H_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ 构成 n 维交换子代数 H_n。再令：

$$E_{\lambda_i-\lambda_k} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & E_{ik} & \\ & & -E_{ki} \end{bmatrix},\quad E_{-\lambda_i+\lambda_k} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & E_{ki} & \\ & & -E_{ik} \end{bmatrix},\quad i < k$$

$$E_{\lambda_i+\lambda_k} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & E_{ik} - E_{ki} \\ & & 0 \end{bmatrix},\quad E_{-\lambda_i-\lambda_k} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & -E_{ik} + E_{ki} & 0 \end{bmatrix},\quad i < k$$

$$E_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} 0 & & e_i \\ -e'_i & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix},\quad E_{-\lambda_i} = \begin{bmatrix} 0 & -e_i & \\ & 0 & \\ e'_i & & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{\lambda_i-\lambda_k}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & E_{ii}-E_{kk} & \\ & & -E_{ii}+E_{kk}\end{bmatrix},\quad H_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & E_{ii}+E_{kk} & \\ & & -E_{ii}-E_{kk}\end{bmatrix},\quad i<k$$

$$H_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & E_{ii} & \\ & & -E_{ii}\end{bmatrix}$$

其中 e_i 表示第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 维向量。我们有：

$$B_n=\mathrm{span}(\bigcup_{i<k}E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}\bigcup_{i}E_{\pm\lambda_i})$$

其中，$\pm\lambda_i\pm\lambda_k(i<k)$ 和 $\pm\lambda_i$ 称为 B_n 的根。类似 A_n 的结构规则，B_n 也有相同的结构公式。

对子代数于 C_n, D_n，通过类似于 B_n 的分块矩阵讨论的方式，可以分别得到其维数为 $\dim C_n=2n^2+n$, $\dim D_n=2n^2-n$。

以上介绍的四个典型的李代数 A_n, B_n, C_n, D_n 都是单代数。

定理 2.1 李代数 $A_n(n\geq 1), B_n(n\geq 1), C_n(n\geq 1), D_n(n\geq 3)$ 都是单代数。

下面简要给出定理 2.1中 $A_n(n\geq 1)$ 是单代数的证明，$B_n(n\geq 1), C_n(n\geq 1), D_n(n\geq 3)$ 的证明同理。

证明 设 I 是 A_n 的一个非 0 理想，我们需要证明 $I=A_n$。在 I 中任取一非 0 元素：

$$0\neq A=A_0+\sum_{\alpha\in\Sigma}\lambda_\alpha E_\alpha$$

其中 $A_0\in H_n$ 而 Σ 表示 A_n 的所有根的集合。不妨假定有一个 $\lambda_\alpha\neq 0$；不然 $0\neq A=A_0\in H_n$，那么由 A_n 的结构公式可知，存在 E_α 使得 $[A_0,E_\alpha]=\alpha_0 E_\alpha\neq 0$，这样 $E_\alpha\in I$。

那么，可以假设有一个 $\lambda_\alpha\neq 0$，由 $A\in I$ 可以得到：

$$[H,\cdots,[H,[H,A]]\cdots](r\text{个括号})=\sum_{\alpha\in\Sigma}\lambda_\alpha\alpha^r E_\alpha\in I,\quad r=1,2,\cdots$$

将不同的 r 对应的式子乘以某个范德蒙德行列式 $V(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)$ 中 α^r 的代数余子式，然后相加，可以得到 $V(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)\lambda_\alpha E_\alpha\in I$。从而推出 $E_\alpha\in I$。 □

第三章　一个三维单李代数的表示

3.1　三维单李代数

设 $\mathbf{g}_3$ 是 3×3 的复系数反对称矩阵组成的一个三维单代数，那么 $\dim \mathbf{g}_3 = 3$。其中一组基为：

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应的结构公式为：

$$[M_1, M_2] = M_3, \quad [M_2, M_3] = M_1, \quad [M_3, M_1] = M_2$$

下面，令：

$$H = iM_3, \quad E_1 = i(M_1 + iM_2), \quad E_{-1} = i(M_1 - iM_2)$$

则有：

$$[H, E_1] = E_1, \quad [H, E_{-1}] = -E_{-1}, \quad [E_1, E_{-1}] = 2H$$

我认为，这里是为了将原本的基 M_1, M_2, M_3 进行变换，得到新的基 H, E_1, E_{-1}。在新的基下，能够更加方便地研究 $\mathbf{g}_3$ 的代数表示。

容易证明，$\mathbf{h} = \{H\}$ 是 $\mathbf{g}_3$ 的一个 Cartan 子代数（因为和 E_1，E_2 作用后不为 0）。$\mathbf{h}$ 的两个根是 λ 和 $-\lambda$，即

$$[\lambda H, E_1] = \lambda E_1, \quad [\lambda H, E_{-1}] = -\lambda E_{-1}$$

而相应的根向量为 E_1 和 E_{-1}。

3.2　$\mathbf{g}_3$ 的表示

我们想要研究 $\mathbf{g}_3$ 的表示。假设 (V, ρ) 是 $\mathbf{g}_3$ 的某个表示，我们把 $\rho(H)$ 的特征根称为 ρ 的权，而 $\rho(H)$ 的非零特征向量称为 ρ 的权向量。首先，我们有：

引理 3.1　设 v 是 ρ 的一个权向量，相应于权 m，即有 $\rho(H)v = mv$。如果 $\rho(E_1)v \neq 0$，则 $\rho(E_1)v$ 是相应于权 $m+1$ 的权向量；如果 $\rho(E_{-1})v \neq 0$，则 $\rho(E_{-1})v$ 是相应于权 $m-1$ 的权向量。

证明 $\rho(H)(\rho(E_1)v) = \rho([H,E_1])v + \rho(E_1)(\rho(H)v) = \rho(E_1)v + \rho(E_1)mv = (m+1)\rho(E_1)v$

$\rho(H)(\rho(E_{-1})v) = \rho([H,E_{-1}])v + \rho(E_{-1})(\rho(H)v) = -\rho(E_{-1})v + \rho(E_{-1})mv = (m-1)\rho(E_{-1})v$ □

因为 V 是有限维的，所以根据上述引理，知道 ρ 总有一个权向量 v 满足 $\rho(E_1)v=0$。设该权向量 v 的权为 j，记 $v=v_j$，那么有

$$\rho(H)v_j = jv_j$$

令：

$$v_{j-1} = \rho(E_{-1})v_j, \quad v_{j-2} = \rho(E_{-1})v_{j-1}, \quad \cdots$$

从而，类似上面的证明，可以得到：

$$\rho(E_1)v_m = (j-m)(j+m+1)v_{m+1}$$

$$\rho(E_1)v_{m-1} = (j-m+1)(j+m)v_m$$

设 j' 是第一个数，使：

$$v_{j'} \neq 0 \quad \text{并且} \quad \rho(E_{-1})v_{j'} = v_{j'-1} = 0$$

那么，也就有：

$$\rho(E_1)v_{j'-1} = (j-j'+1)(j+j') = 0$$

由于 $j-j'+1 \geq 1$，所以有 $j+j'=0$。这样，权值 j 为非负整数或者半整数。(因为 j'=j 减去某个非负整数)。更进一步，可以证明：

$$v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$$

生成 ρ 的一个不可约不变子空间。这即为下述定理。

定理 3.2 设 ρ 是 $\mathbf{g}_3$ 的一个不可约表示，表示空间为 V，于是 $\dim V = 2j+1$，其中 j 为非负整数或半整数的权值，满足 $\rho(H)v_j = jv_j$ 而 $\rho(E_1)v_j = 0$，而且我们可以在 V 中选一组基 $v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$ 使得：

$$\rho(H)v_m = mv_m$$
$$\rho(E_{-1})v_m = v_{m-1}$$
$$\rho(E_1)v_m = (j-m)(j+m+1)v_{m+1}$$

对于 $m = j, j-1, \cdots, -j$，其中 $v_{j+1} = v_{-j-1} = 0$。

证明 首先，容易知道 V 在 ρ 的作用下不变。其次，假设 V' 是 V_j 在 ρ 的作用下不变的子空间，设 $V' \neq 0$，那么 $\rho(H)$ 在 V' 中一定有一个特征值 $k \in \{j, j-1, \cdots, -j\}$。因为 V 中 $\rho(H)$ 的特征值都是单的，故 V' 一定含有 v_k，那么利用上面的三个公式，可以推出 $v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$ 都属于 V'，即为 $V' = V$。这边证明了 V 的不可约性。 □

这时，我们称 j 为不可约表示 ρ 的首权（首个基在 $\rho(H)$ 下的权值）。因此，$\mathbf{g}_3$ 的两个不可约表示等价，当且仅当它们有相同的首权。

反过来，同样可以根据首权 j 来定义不可约表示。

定理 3.3 任给一个非负整数或者半整数 j，可以按照定理3.2中的公式来定义 $\mathbf{g}_3$ 的一个不可约表示 ρ，其首权为 j。

证明 首先，当 ρ 满足定理3.2中的公式时，可以验证如下结果：

$$[\rho(H), \rho(E_1)] = \rho(E_1)$$
$$[\rho(H), \rho(E_{-1})] = -\rho(E_{-1})$$
$$[\rho(E_1), \rho(E_{-1})] = 2\rho(H)$$

这证明了 ρ 确实是 $\mathbf{g}_3$ 的一个表示（满足同态性质）。又由定理3.2中关于 V 不可约性的证明，说明 ρ 是不可约表示。 □

上述的定理3.2和定理3.3可以用来求解 $\mathbf{g}_3$ 的不可约表示的问题。记 $V_j, (\rho_j)$ 为 $\mathbf{g}_3$ 的首权为 j 的不可约表示。由上述讨论知道，ρ_j 是 $2j+1$ 级的表示。

通过定理3.2可以得到下述推论：

推论 3.4 设 v 为 V_i 中权威 r 的向量。设 p 为使得 $\rho_j(E_{-1})^p v \neq 0$ 的最大非负整数，q 为使得 $\rho_j(E_1)^q v \neq 0$ 的最大非负整数，那么有 $2r = -(q-p)$，并且 $p+q = 2j$。此外，$\rho_j(E_{-1})^i \rho_j(E_1)^q v \neq 0, (0 \leq i \leq p+q)$ 而 $\rho_j(E_{-1})^i \rho_j(E_1)^q v$ 是属于权 $r+q-i$ 的向量。

证明 因为 $\rho_j(H)$ 的特征根都是单的，所以 v 与 v_r 线性相关，因此不妨设 $v = v_r$。根据定理3.2中的公式知道，如果 $\rho_j(E_1)^i v_r \neq 0$，则有 $\rho_j(E_1)^i v_r$ 属于权 $r+i$，因此与 v_{r+i} 线性相关。于是，由 $\rho_j(E_1)\rho_j(E_1)^q v_r = 0$ 推出 $r+q = j$。同理，有 $r-q = -j$，将 $r+q = j$ 与 $r-p = -j$ 相加得到 $2r = -(q-p)$，相减得到 $p+q = 2j$。 □

下面的定理解决了寻求 $\mathbf{g}_3$ 的一切表示的问题。

定理 3.5 $\mathbf{g}_3$ 的任一表示皆完全可约。

证明 首先，引进 $\mathbf{g}_3$ 的表示 ρ 的 Casimir 算子：

$$\begin{aligned}\rho(G) &= -\frac{1}{2}(\rho(M_1)^2 + \rho(M_2)^2 + \rho(M_3)^2) \\ &= \frac{1}{4}(\rho(E_1)\rho(E_{-1}) + \rho(E_{-1})\rho(E_1)) + \frac{1}{2}\rho(H)^2\end{aligned}$$

容易验证，$\rho(G)$ 与 $\rho(\mathbf{g}_3)$ 中每个线性变换皆交换。因此，如果 ρ 是不可约表示，则根据 Schur 引理，$\rho(G)$ 是恒同变换的倍数。特别的，如果 ρ_j 是首权为 j 的不可约表示，则有：

$$\rho_j(G) = \frac{1}{2}j(j+1)I$$

实际上：

$$\begin{aligned}\rho_j(G)v_m &= [\frac{1}{4}(\rho_j(E_1)\rho_j(E_{-1}) + \rho_j(E_{-1})\rho_j(E_1)) + \frac{1}{2}\rho_j(H)^2]v_m \\ &= \frac{1}{4}\rho_j(E_1)v_{m-1} + \frac{1}{4}\rho_j(E_{-1})(j-m)(j+m+1)v_{m+1} + \frac{1}{2}m^2 v_m \\ &= \frac{1}{4}(j-m+1)(j+m)v_m + \frac{1}{4}(j-m)(j+m+1)v_m + \frac{1}{2}m^2 v_m \\ &= \frac{1}{2}j(j+1)v_m, \quad (m = j, j-1, \cdots, -j)\end{aligned}$$

即证。 □

引理 3.6 如果 $\mathbf{g}_3$ 的一个表示 ρ 恰好包含两个不可约表示，即 ρ 的表示空间 V 包含有两个不可约的不变子空间，V_0 和其对应的商空间 V/V_0，那么 V 有不变子空间 V' 存在，使得 V 可以分解为 V_0 和 V' 的直和：$V = V_0 \oplus V'$。

该引理的证明颇有几分复杂，这里暂时略去。主要是对于两个不可约表示 $\rho_j, \rho_{j'}$ 中 $j = j'$ 与 $j \neq j'$ 进行讨论。

这里指出，可以通过引理3.6来证明定理3.2。

证明 设 ρ 是 $\mathbf{g}_3$ 的一个表示，表示空间为 V，再设 V_0 是 ρ 的一个不可约不变子空间。假定定理3.2对于维数较 V 低的表示空间成立，那么有：

$$V/V_0 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \cdots + \bar{V}_m$$

其中 $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \cdots, \bar{V}_m$ 都是 V/V_0 的不可约不变子空间。以 U_i 表示 V 中向量在自然同态：

$$V \to V/V_0$$

之下映到 $\bar{V}_i$ 去的那些向量所构成的子空间，则有：

$$U_i/V_0 = \bar{V}_i$$

于是，根据引理3.6，U_i 有不可约不变子空间 V_i 使得

$$U_i = V_0 + V_i$$

那么：

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_m$$

这就证明了 ρ 是完全可约的。 □

上述推论3.4可以通过如下的推广。证明方式类似于推论3.4，只需要通过定理将表示 ρ 分解成不可约表示的和，然后根据定理将每个不可约表示和 ρ_j 等价即可。

引理 3.7 设 ρ 是 $\mathbf{g}_3$ 的一个表示，则 ρ 的权都是整数或半整数。设 v 是 ρ 的表示空间 V 中属于权 r 的一个向量。如果以 p 表示最大非负整数使得 $\rho(E_{-1})^p v \neq 0$，而以 q 表示最大非负整数使得 $\rho(E_1)^q v \neq 0$，那么有 $2r = -(q-p)$。此外，$\rho(E_{-1})^i \rho(E_1)^q v \neq 0$, $(0 \leq i \leq p+q)$ 而 $\rho(E_{-1})^i \rho(E_1)^q v$ 是属于权 $r+q-i$ 的向量。